# 第二章　插值法与数值微分

代数插值：　用代数多项式插值．

插值函数 $\varphi(x)$：$1^\circ$ $\partial\varphi(x) \le n$　　（原数据有 $n+1$ 个点）

$2^\circ$ $\varphi(x_i) = y_i$　，$i=1,\cdots,n+1$．

称 $x_i$ 为插值节点．

## 2-1 线性插值．

1、Lagrange 插值、(两点式)

$\varphi_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$，其中 $l_0(x)$、$l_1(x)$ 为插值基函数。

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \quad , \quad l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

2、Newton 插值．（点斜式）

$$\varphi_1(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f[x_0, x_1]$$

（一阶均差）$f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$　　优点：新增节点时，改动很小．

3、行列式形式

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x_0-x_1}\begin{vmatrix} f(x_0) & x-x_0 \\ f(x_1) & x-x_1 \end{vmatrix}$$

优点：编程方便．(call function)

## 2-2 二次插值．

1、Lagrange 插值．

$$\varphi_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

条件：　$l_i(x_j) = \delta_{ij}$

算得：$l_i(x) = \dfrac{(x-x_j)(x-x_k)}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}$

2、Newton 插值．

$$\varphi_2(x) = \cancel{A + B(x_0-x_1) + C(x_0}$$

$$= f(x_0) + (x-x_0)\, f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\, f[x_0,x_1,x_2]$$

（二阶均差）$f[x_i,x_j,x_k] = \dfrac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}$

3、行列式插值．（逐次线性插值）

$$\varphi_{01}(x) = \frac{1}{x_0-x_1}\begin{vmatrix} f(x_0) & (x-x_0) \\ f(x_1) & (x-x_1) \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{02}(x) = \frac{1}{x_0 - x_2}\begin{vmatrix} f(x_0) & x - x_0 \\ f(x_2) & x - x_2 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{012}(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} \varphi_{01}(x) & x - x_1 \\ \varphi_{02}(x) & x - x_2 \end{vmatrix}$$

## 2.3 n次插值.

### 1. Lagrange 插值.

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

条件：$l_k(x_i) = \delta_{ik}$

算得：$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}$

### 2. Newton 插值.

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}(x) + \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i) \cdot f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

n阶均差：$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] - f[x_1, \cdots, x_n]}{x_0 - x_n}$

### 3、逐次线性插值.

$$\varphi_{012\cdots n}(x) = \frac{1}{x_{n-1} - x_n}\begin{vmatrix} \varphi_{01\cdots(n-1)}(x) & x - x_{n-1} \\ \varphi_{01\cdots(n-2)n}(x) & x - x_n \end{vmatrix}$$

### 4、误差估计.

定理2-1：

$$\boxed{\begin{aligned} &R_n(x) = f(x) - \varphi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_n(x) \\ &\text{其中 } \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k), \quad \xi = \xi(x) \in [a,b] \end{aligned}}$$

对于 $n+1$ 个点 $x_0 \sim x_n$ 的 $n$ 次插值多项式 $\varphi_n(x)$，其真实值函数为 $f(x)$.

$f(x) \in C^n_{[a,b]}$，且其 $n+1$ 阶导数存在，区间包含采样点 $x_0 \sim x_n$.

那么对于 $[a,b]$ 上任一点 $x$，插值函数的误差可以用 $R(x)$ 估计.

证明：设辅助函数

$$\psi(t) = f(t) - \varphi_n(t) - \frac{R_n(x)\,\omega_n(t)}{\omega_n(x)}, \quad x \in [a,b] \text{ 且异于 } x_1 \sim x_n.$$

则 $\psi(x_i) = 0$, $(i = 0, \cdots, n)$; $\psi(x) = 0$.

对 $\psi(t)$ 求 $n+1$ 阶导数，得

$$\psi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{R_n(x) \cdot (n+1)!}{\omega_n(x)}$$

由罗尔定理，$\psi(t)$ 有 $n+2$ 个零点，所以 $\psi'(t)$ 至少有 $n+1$ 个零点，

依此类推，$\psi^{(n+1)}(t)$ 至少有一个零点.

$$\therefore R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_n(x)$$

估值：$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\omega_n(x)|$，其中 $M = \max \{|f^{(n+1)}(x)|\}$

事后估计：$\varphi_n^{(1)}(x)$ 和 $\varphi_n^{(2)}(x)$ 分别是用点 $x_0 \sim x_n$ 和点 $x_1 \sim x_{n+1}$ 构造的 n次插值多项式，

误差函数 $R^{(1)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$

$R^{(2)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n+1}(x-x_k)$ ，$(\xi_1, \xi_2 \in (a,b))$

假设 $f^{(n+1)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内连续，且变化很小，则 $\dfrac{f-\varphi_n^{(1)}}{f-\varphi_n^{(2)}} \approx \dfrac{x-x_0}{x-x_{n+1}}$

得到 $R^{(1)}(x) = f(x)-\varphi_n^{(1)}(x) \approx \dfrac{x-x_0}{x_0-x_{n+1}}(\varphi_n^{(1)}(x)-\varphi_n^{(2)}(x))$，这就是事后估计.

注：事后估计表明可以用两个插值函数之差来估计误差，而不依赖于真实函数。事后估计不一定保守。

## 2.4 分段线性插值.($C^0$)

### 1. 高次插值多项式的缺陷.

(1) 加密插值节点不一定保证插值函数能更好的逼近真实函数.(原因：截断误差的绝对值不一定在节点数增加时减少.)

(2) 代数插值的次数越高，插值函数对舍入误差越敏感，即计算稳定性不好.

(解释：误差 $|\varphi_n(x)-\tilde{\varphi}_n(x)| = \left|\sum_{i=0}^{n} l_i(x)y_i - \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\tilde{y}_i\right| \le \sum_{i=0}^{n}|l_i(x)||y_i-\tilde{y}_i| \le \varepsilon\sum_{i=0}^{n}|l_i(x)|$.

有"~"的项为考虑舍入误差的项，$\varepsilon$ 为舍入误差的绝对误差限. 在n很大时，放大因子 $\sum_{i=0}^{n}|l_i(x)| \gg$ 即 Lagrange 插值法不稳定.)

### 2. 分段线性插值函数.

分段线性插值基函数

(1) $l_0(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$，$(x\in[x_0,x_1])$；$0$，$(x\in(x_1,x_n])$

(2) $l_j(x) = \dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}$，$(x\in[x_{j-1},x_j])$；$\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}$，$(x\in(x_j,x_{j+1}])$；$0$，elsewhere

(3) $l_n(x) = \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$，$(x\in[x_{n-1},x_n])$；$0$，$(x\in[x_0,x_{n-1}))$

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$$

### 3. 误差估计

$$|R(x)| = |f(x)-\varphi(x)| \le \frac{h^2}{8}M$$

其中，$h = \max\limits_{0\le i\le n-1}|x_{i+1}-x_i|$，$M = \max\limits_{a\le x\le b}\{|f''(x)|\}$

证明：$|R(x)| \le \max\limits_{0\le i\le n-1}\left\{\dfrac{(x_{i+1}-x_i)^2}{8}\max\limits_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f''(x)|\right\} \le \dfrac{h^2}{8}M$

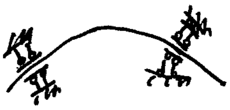
## 2.5 Hermite 插值.

### 1. 插值函数

$$H(x) = y_0h_0(x) + y_1h_1(x) + m_0H_0(x) + m_1H_1(x)$$

填型：

定向支座.



插值基函数

$$h_0(x) = \left[1+\frac{2(x-x_0)}{x_1-x_0}\right]\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$H_0(x) = (x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

2. 误差估计

$$R(x) = f(x) - H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$ ，其中 $\xi \in [a,b]$

其中 $f \in C^3_{[a,b]}$，且4阶导数存在；$|R(x)| \le \frac{M}{384} h_1^4$ （$M = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$）

（$h_1 = |x_0 - x_1|$）

证明：构造辅助函数.

$$\psi(t) = f(t) - H(t) - R(x)\frac{(t-x_0)^2(t-x_1)^2}{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}$$

误差函数中 $g(x)$ 部分的构造标准：
1、$g(x)$ 是多项式，首项系数为1.
2、$g(x)$ 在取样点处为0.
3、$g'(x)$ 在取样点导数已知处为0
4、$\partial g(x)$ 等于信息数.

（注：辅助函数构造技巧.

$$\psi(t) = f(t) - \varphi(t) - R(x)\frac{g(t)}{g(x)}$$

其中 $g(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^i$，当提供函数值时，$i$ 取1；当提供函数值和导数值时，$i$ 取2.）

3、有 $n+1$ 个节点的 Hermite 插值.

插值基函数 $h_i(x) = \left(1 - \frac{w''(x_i)}{w'(x_i)}(x-x_i)\right) l_i^2(x)$

$H_i(x) = l_i^2(x)(x-x_i)$ ，其中 $l_i(x) = \frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)}$

插值函数 $H(x) = \sum_{i=0}^{n}(y_i h_i(x) + m_i H_i(x))$

误差函数 $R(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} w^2(x)$

2.6 分段三次 Hermite 插值. （$C^1$）

插值基函数 $h_0(x)$，$h_i(x)$，$h_n(x)$

$H_0(x)$，$H_i(x)$，$H_n(x)$

插值函数 $H(x) = \sum_{i=0}^{n}(h_i(x)y_i + H_i(x)m_i)$

误差公式同 2.5-2

2.7 样条插值函数. （$C^2$）

要求：1° $S(x_i) = y_i$ （$i=0,\cdots,n$）

2° $S'(x_i-) = S'(x_i+)$ （$i=1,\cdots,n-1$）

3° $S''(x_i-) = S''(x_i+)$ （$i=1,\cdots,n-1$）

模型：
铰接

边条件：1) 固支边界条件 $S'(x_0) = m_0$，$S'(x_n) = m_n$.

2) 自然边界条件 $S''(x_0) = 0$，$S''(x_n) = 0$

3) 周期边界条件 $S'(x_0) = S'(x_n)$，$S''(x_0) = S''(x_n)$

步骤：1° 假定取样点一阶导数 $m_0 \sim m_n$，作分段三次 Hermite 插值.

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i h_i(x) + m_i H_i(x)\right]$$

2° 利用连续性要求(3°)和边界条件，建立关于 $m_0 \sim m_n$ 的线性方程组.

其中，中间的 $(n-1)$ 个方程为

$$(1-\alpha_i)m_{i-1} + 2m_i + \alpha_i m_{i+1} = \beta_i \qquad (i=1,\cdots,n-1)$$

$$\left(\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},\ \beta_i = 3\left[\frac{1-\alpha_i}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) + \frac{\alpha_i}{h_i}(y_{i+1}-y_i)\right],\right.$$

$$\left. h_i = x_{i+1} - x_i \right)$$

3° 用追赶法解上面的三对角方程组.

收敛性(误差估计)：

$$\left| f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x) \right| \le C_k M_4 h^{4-k} \qquad (k=0,1,2,3)$$

其中 $C_0 = \frac{5}{384}$，$C_1 = \frac{1}{24}$，$C_2 = \frac{3}{8}$，$C_3 = (\beta+\beta^{-1})/2$

$h = \max\limits_i \{h_i\}$，$\beta = \frac{\max\limits_i\{h_i\}}{\min\limits_i\{h_i\}}$

$f(x) \in C^4_{[a,b]}$ 且 $f^{(4)}(x) \le M_4$

边界条件：$f'(x) = S'(x)$ 或 $f''(x) = S''(x)$.

收敛性：当 $h \to 0$ 时，$S^{(k)}(x) \to f^{(k)}(x)$，$(k=0,1,2)$

且当 $\beta < \infty$ 时，$S^{(3)} \to f^{(3)}(x)$.

## 2.8 数值微分.

$$f(x) = \varphi_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

$$f'(x) = \varphi_n'(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n'(x) + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

$$f'(x_k) = \varphi_n'(x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n'(x_k)$$

1° 两点式

$$f'(x_0),\ f'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$R_1(x_0) = -\frac{h}{2}f''(\xi), \quad R_2(x_1) = \frac{h}{2}f''(\xi).$$

2° 三点公式

$$f'(x_0) \approx \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h},\quad f'(x_1) \approx \frac{y_2 - y_0}{2h},\quad f'(x_2) \approx \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}$$

$$R_2(x_0) = \frac{h^2}{3}f'''(\xi),\quad R_2(x_1) = \frac{-h^2}{6}f'''(\xi),\quad R_2(x_2) = \frac{h^2}{3}f'''(\xi).$$

$$f''(x_i) = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}.$$